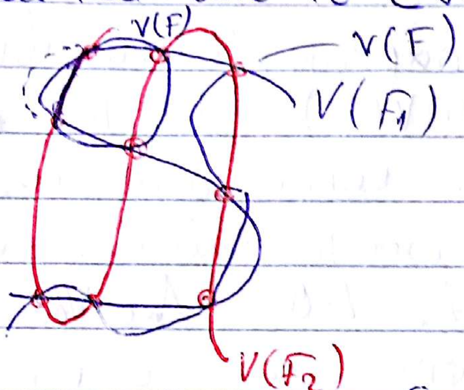
30/05/17.

Θεώρημα των εννέα σημείων (*)

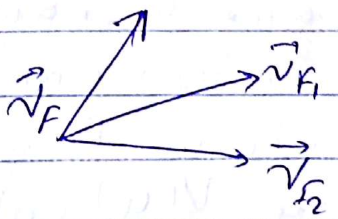
Αν δύο κυβικές τέμνονται σε ακριβώς εννέα σημεία τότε κάθε άλλη κυβική που διέρχεται από τα 8 απ'αυτά, διέρχεται και από το ένατο.



Αποδ: $V(F_1)\cap V(F_2)=\{P_1,\dots P_8,P_9\}$

$\{P_1,\dots,P_9\}\subseteq V(F)$ → γενικά τυχόν σώμα K.

Θέλω ένα σημείο $P_F\in \mathbb{C}^{10}$. Ουσιαστικά κάθε κυβική καθορίζεται από ένα δ/μα $\vec{v}_F\in K^{10}$.



Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

i) $\vec{v}_F$ ΓΕ από τα $\vec{v}_{F_1}$ κ' $\vec{v}_{F_2}$

ii) $\vec{v}_F$ ΓΑ από τα $\vec{v}_{F_1}$ κ' $\vec{v}_{F_2}$

i) $\vec{v}_F=\kappa\vec{v}_{F_1}+\lambda\vec{v}_{F_2}$ δηλ. $F=\kappa F_1+\lambda F_2$

Όμως $F(P_9)=\kappa F_2(P_9)+\lambda F_2(P_9)=0+0=0\Rightarrow$

$\Rightarrow F(P_9)=0\Rightarrow P_9\in V(F)$.

ii) $\vec{v}_F,\vec{v}_{F_1},\vec{v}_{F_2}$ ΓΑ στον K^{10}. Θέλω να καταλήξω σε άτοπο. Ισχυρίζομαι ότι $\exists\,\kappa,\lambda,\mu$: έτσι ώστε η $V(\kappa F+\lambda F_1+\mu F_2)$ να διέρχεται από οποιαδήποτε δύο σημεία του επιπέδου K_1,K_2.

V: ο χώρος των κυβικών που διέρχεται από το K_1,K_2.

$\dim V+\dim U=\dim(U+V)+\dim(U\cap V)$, όπου

U: ο χώρος που παράγεται από τα ΓΑ $\vec{v}_F,\vec{v}_{F_1},\vec{v}_{F_2}$.

Είναι $\dim(U+V)\le\dim K^{10}\Rightarrow 8+3-\dim(U\cap V)\le 10\Rightarrow$

$1 \leq \dim(V \cap V)$

Απ' την υποθ. που έκανα: $\begin{cases} \kappa F(\kappa_1) + \lambda F_1(\kappa_1) + \mu F_2(\kappa_1) = 0 \\ \kappa F(\kappa_2) + \lambda F_2(\kappa_2) + \mu_2(\kappa_2) = 0 \end{cases}$

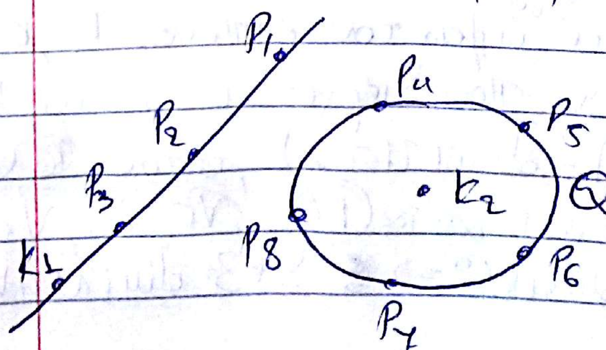
Πάντα έχει λύσεις αυτό το σύστημα.

Η καμπύλη $V(\kappa F + \lambda F_1 + \mu F_2)$ διέρχεται σίγουρα απ' τα $\{P_1, \dots, P_8\} \subseteq V(L)$

- Από τα 9 σημεία δεν υπάρχουν 4 στην ίδια ευθεία. (Έστω όχι τότε $V(L) \cap V(F_1) \supseteq \{P_1, \dots, P_4\}$. Από ασθενές Θεώρημα Bezout, έχουν κοινή συνιστώσα η οποία είναι η $V(L)$ αφού έχει μοναδική συνιστώσα (ως ευθεία) $\Rightarrow$ $\rightarrow F_1 = L \cdot Q_1$. Όμοια $F_2 = L \cdot Q_2$. Άρα $V(L) \subseteq V(F_1)$ και $V(L) \subseteq V(F_2)$ ΑΤΟΠΟ αφού οι καμπύλες έχουν ακριβώς 9 κοινά σημεία)
- Από τα 9 σημεία, 7 δεν ανήκουν στην ίδια κωνική (Έστω όχι, δηλ τα $P_1, \dots, P_7$ ανήκουν στην ίδια κωνική. $V(Q)$ ανάγωγη [Διαφορετικά $Q = L_1 L_2 \Rightarrow V(Q) = V(L_1) \cup V(L_2)$ ΑΤΟΠΟ γιατί τότε θα έχω αναγκαστικά 4 απ' αυτά στην ίδια ευθεία που δείξαμε παραπάνω ότι δεν γίνεται]. Τότε $V(Q) \cap V(F_1) \supseteq \{P_1, \dots, P_7\}$ από το ασθενές Θεώρημα Bezout, έχουν κοινή συνιστώσα την $V(Q)$ δηλ $F_1 = Q \cdot L'$. Όμοια $F_2 = Q \cdot L''$. Άρα $V(Q) \subset V(F_1) \cap V(F_2)$ ΑΤΟΠΟ.
- Από τα 8 σημεία $P_1, \dots, P_8$ τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Έστω όχι, P_1 P_2 P_3 $\in V(L)$

Τα υπόλοιπα 5 σημεία καθορίζουν μοναδικά μία κωνική. (Η υπόλοιπη απόδειξη υπάρχει στις σημειώσεις).

(Εδώ θα γίνει περιληπτικά).



$V(\kappa F + \lambda F_1 + \mu F_2) \supseteq \{K_1, K_2\}$

$\kappa F + \lambda F_1 + \mu F_2 = L \cdot Q$.

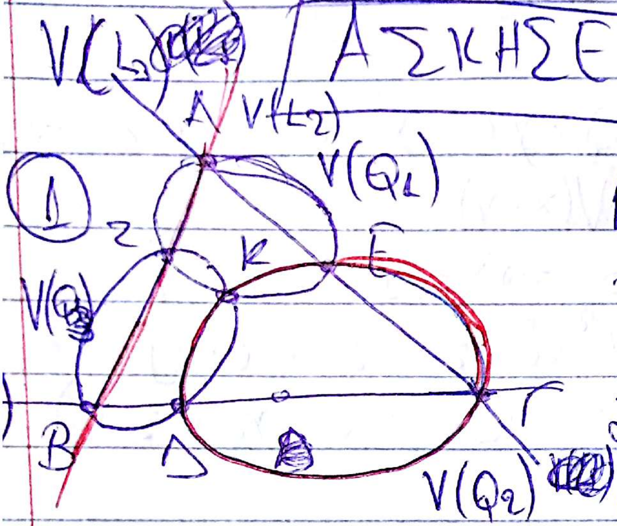
Όμως διάλεξα $K_2 \notin L$ ενώ $K_2 \in (\kappa F + \lambda F_1 + \mu F_2)$ και $K_2 \notin Q$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΑΤΟΠΟ!

• 6 σημεία δεν βρίσκονται στην ίδια κωνική.

~~Θεώρημα~~ $\overline{(A+B)+\Gamma} = A+(B+\Gamma)$ · στην ομάδα που έχουμε ορίσει σε περασμένο μάθημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Παλιά θέματα).



Νδο Κ κοινό σημείο των τριών κύκλων.

Λύση: Έχω 3 κυβικές που ορίζονται από τον κάθε κύκλο και την ευθεία όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$V(L_1Q_1) \cap V(L_2Q_2) = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, K, I, I^*\}$$

Γενικός κύκλος: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-x_0z)^2+(y-y_0z)-r^2z^2=0 \xrightarrow{z=0}$$

$$\longrightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow (x+iy)(x-iy)=0$$

Για $y=1 \Rightarrow x=-i$. Για $y=1$ (στην $2^η$): $x=i$

Άρα έχω τα σημεία $\underbrace{(1, i, 0)}_{I}$ κ' $\underbrace{(-i, 1, 0)}_{I^*}$.

(σημεία που περνάνε όλοι οι κύκλοι).

Η $V(Q_3)$ επειδή περιέχει και κύκλο διέρχεται από τα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, I, I^*$ και ~~επειδή~~ άρα από το θεώρημα των 9 σημείων $\Rightarrow$

σημεία τομής των $V(Q_1)$ $V(Q_2)$

$$\Rightarrow K \in V(Q_3).$$

② Βρείτε όλες τις ανάγωγες κωνικές που διέρχονται από τα σημεία $(1,0,0)$, $(2,0,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ και εφάπτονται στην ευθεία $V(x-y)$.

Λύση:

$$Q = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta xz + \varepsilon yz + \zeta z^2$$

$(1,0,0) \in Q \Rightarrow \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 + \varepsilon \cdot 0 + \zeta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$(1,0,1) \in Q \Rightarrow \cancel{\alpha 1} + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 + \varepsilon \cdot 0 + \zeta \cdot 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{\delta + \zeta = 0}$

$(1,1,1) \in Q \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = 0}$

$(1,1,0) \in Q \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}, \boxed{\zeta = -\delta}, \boxed{\beta = -\gamma}, \boxed{\varepsilon = 0}$

Άρα τελικά έχω: $Q = -\gamma xy + \gamma y^2 + \delta xz - \delta z^2 = 0$.

Εφάπτεται στην $V(x-y)$

Λύνω το σύστημα: $x - y = 0 \Rightarrow x = y$
$-\gamma xy + \gamma y^2 + \delta xz - \delta z^2 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{-\gamma y^2} + \cancel{\gamma y^2} + \delta xz - \delta z^2 = 0 \overset{(x=y)}{\Rightarrow} \delta(yz - z^2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta z(y - z) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = 0}$

Εδώ έτυχε να είναι συνιστώσα της Q η $V(x-y)$.

Αν είχα $x = 5y$ (π.χ.) τότε $-5\gamma y^2 + \gamma y^2 + \delta 5yz - \delta z^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4\gamma y^2 + 5\delta yz - \delta z^2 = 0$.

Θέλω $\Delta = 0 \Rightarrow 25\delta^2 - 4(-4\gamma)(-\delta) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25\delta^2 - 16\gamma\delta = 0 \Rightarrow \delta(25\delta - 16\gamma) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \text{ή } \delta = \frac{16}{25}\gamma. \end{cases}$

Άρα εφάπτεται όταν $\delta = 0$ είτε $\delta = \frac{16}{25}\gamma$

③ Βρείτε δύο κυβικές που να τέμνονται ακριβώς σ' ένα σημείο στον $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Λύση: $V(x^3)\cap V(y^3)=\{(0,0,1)\}$.

Αν ήθελα μία απ' τις 2 να είναι ανάγωγη (δηλ. όχι ευθεία).

$V(\underbrace{yz-x^3}_{F})$ $\uparrow y=x^3$ αλλά στον προβ. χώρο.

$$H_F=\begin{vmatrix} -6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{vmatrix} = 24xz^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3x^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=z^2,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2yz$$

Άρα έχω την $\begin{cases} F=yz^2-x^3=0 \\ H_F=0 \Rightarrow 24xz^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } z=0 \end{cases}$

Για $x=0 \Rightarrow y=0$ ή $z=0$

$\qquad (0,0,1) \qquad (0,1,0)$

Για $z=0 \Rightarrow (0,1,0)$.

Θέλω να δω ποιο είναι απλό:

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1)=1\neq 0 \Rightarrow (0,0,1)$: απλό

Ενώ $\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,0)=0=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(0,1,0)} \Rightarrow (0,1,0)$: ιδιόμορφο

Άρα το $(0,0,1)$: σημείο καμπής.

Εφ/νη στο $(0,0,1)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)\cdot z=0$

$\Rightarrow \boxed{y=0}$.

Άρα η άλλη καμπύλη που έψαχνα είναι η $V(y^3)$.

(Για να είχα γενικά 2 ανάγωγες θα έπαιρνα: $yz^2-x^3=0$ και $y^3+s(yz^2-x^3)=0$ $\leadsto s\neq 0$).

άρα θα είχα $V(L)\cup V(Q)$ ← έστω μη-αναγώγη

Τότε $y^3+s(yz^3-x^3)=yQ \Rightarrow y \mid y^3+s(yz^2-x^3) \Rightarrow$

$\Rightarrow y / s(yz^2-x^3) \Rightarrow$

$\Rightarrow s=0$

4) Δείξτε ότι οι ασύμπτωτες ενός κύκλου στο $\mathbb{C}^2$ διέρχονται από το κέντρο του.

Λύση: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Σημεία στο άπειρο:

— Ομογενοποιώ $\Rightarrow (x-x_0z)^2+(y-y_0z)^2=r^2z^2$

— Βάζω $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow (x+iy)(x-iy)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (i,1,0),(1,i,0)$: κυκλικά σημεία στο ∞.

Εφ/νες στα σημεία στο άπειρο:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-x_0z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2(y-y_0z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2(x-x_0z)(-x_0)+2(y-y_0z)(-y_0)-2r^2z$$

Εφ/νη στο $(i,1,0)$: $2ix+2y+(2i(-x_0)+2\cdot1\cdot(-y_0))z=0$

Εφ/νη στο: $(1,i,0)$: $2x+2iy+(2(-x_0)+2i(-y_0))z=0$

— Ασύμπτωτες: Αποομογενοποιώ (δηλ $z=0$) $\Rightarrow$

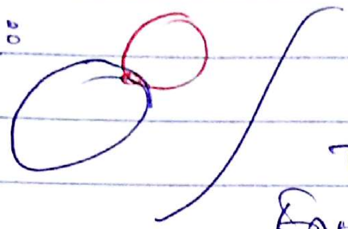
$$\Rightarrow \begin{cases} 2ix+2y+(2i(-x_0)+2(-y_0))=0 \\ 2x+2iy+2(-x_0)+2i(-y_0)=0 \end{cases}$$

Το σημείο (x_0,y_0) είναι σημείο και των 2 ασυμπτώτων αφού για $x=x_0$, $y=y_0$ - $\begin{cases} 2ix_0+2y_0+2i(-x_0)+2(-y_0)=0 \\ 2x_0+2iy_0+2(-x_0)+2i(-y_0)=0 \end{cases}$

Θυμίζει την ομάδα

(5) Δίνεται μία λεία (χωρίς ιδιόμορφα σημεία) κυβική και μία κωνική που να τέμνει την κυβική μόνο σ' ένα σημείο. Τι ξέρετε γι' αυτό το σημείο;

Λύση:



Γενικά μια κυβική και μια κωνική τέμνονται σε έξι σημεία.
Τότε $\sum_{i=1}^{6} P_i = 0$ (η πράξη στην ομάδα)
Επειδή έχω ένα σημείο $\Rightarrow 6P = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow o(P) = \underset{\downarrow \text{ το } O}{1}, 2, 3$ ή 6 $\rightarrow$ συνολικά 36 σημεία.

(6) Βρείτε 5 3-άδες $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ με ΜΚΔ$(x,y,z)=1$ τέτοιες ώστε: $x^2+9y^2-11z^2=0$ ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιες τριάδες. και $x^2+9y^2-10z^2=0$

Λύση:

• $\underbrace{x^2+9y^2-10=0}_{\text{προφανώς } (-1,-1)\in}$ $\longrightarrow$ ψάχνω ρητές λύσεις (και άρα ψάχνω και ακέραιες)

Λύνω $\begin{cases} y+1=\lambda(x+1), & \lambda\in\mathbb{Q} \\ x^2+9y^2-10=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-1+9y^2-9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y+1=\lambda(x+1) \\ (x-1)(x+1)+9(y-1)\underbrace{(y+1)}_{\lambda(x+1)}=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(x-1)+9\lambda(y-1)\right](x+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1+9\lambda y-9\lambda=0 \xrightarrow[\text{και το } y+1 \text{ από την σχέση παραπάνω}]{\text{αντικαθιστώ}}$

$\Rightarrow x=\dfrac{1+18\lambda-9\lambda^2}{1+9\lambda^2} \longrightarrow y=-1+\lambda\left(\dfrac{1+18\lambda-9\lambda^2}{1+9\lambda^2}+1\right)$

Για να βρω 5 τριάδες $\longrightarrow$ βάζω 5 τιμές στο λ.

και η ακέραια ~~θ~~ λύση θα είναι Z = παρονομαστής.

- Για αυτήν που δεν έχει λύσεις έχουμε δει παρόμοια.